BONUSBLATT :: VOLLSTÄNDIGE ELEKTRODYNAMIK

Ihre Lösung des Bonusblattes kann nicht mehr in der Plenarübung zurückgegeben werden. Die Punkte des Bonusblattes könnten hilfreich sein, die Studienleistung doch noch zu erreichen. Der Inhalt ist selbstverständlich relevant für die Klausur

**[H32]** *Atmende Ladungsdichte* **[$4 + 4 + 4 = 12$ Punkte]**

Eine zeitliche veränderliche, radialsymmetrische Ladungsverteilung habe die Form

$$\varrho(\vec{r}, t) = \varrho_0 \frac{\lambda(t)}{r^2} \mathrm{e}^{-\alpha\lambda(t)r} ,$$

wobei $r = |\vec{r}|$ ist.

(a) Welche Stromdichte $\vec{j}$ ergibt sich aus der Ladungserhaltung? *Hinweis*: Es ist eine inhomogene Differentialgleichung zu lösen. Verwenden Sie dafür z.B. das Verfahren der Variation der Konstanten. Es genügt, $\vec{j}$ bis auf freie Integrationskonstanten zu bestimmen.

(b) Bestimmen Sie $\vec{E}$ aus einem geeigneten Ansatz.

(c) Zeigen (oder argumentieren) Sie, dass das Magnetfeld verschwindet, $\vec{B} = 0$.

*Hinweise*: Berücksichtigen Sie die Symmetrie des Problems, verwenden Sie Kugelkoordinaten und arbeiten Sie zunächst direkt mit den Maxwell-Gleichungen in differentieller Form. Formeln für Ausdrücke wie div $\vec{V}(r)$ und rot $\vec{V}(r)$ in Kugelkoordinaten dürfen ohne Herleitung verwendet werden. Zur Bestimmung von Integrationskonstanten wende man zum Schluss die Maxwell-Gleichungen in integraler Form an.

**[H33]** *Lorenz-Eichung* **[$2 + 3 + 3 + 2 = 10$ Punkte]**

Eine weitere wichtige Eichung neben der Coulomb-Eichung ist die Lorenz-Eichung, zu der wir hier ein paar Überlegungen anstellen.

(a) Leiten Sie aus den Maxwell-Gleichungen die Kontinuitätsgleichung ab,

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 .$$

(b) Zeigen Sie nun, dass es immer möglich ist, das Vektorpotential $\vec{A}$ und das elektrische Potential $\Phi$ durch Eichung so zu wählen, dass gilt:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 .$$

Beachten Sie die formale Ähnlichkeit zur Kontinuitätsgleichung. *Hinweis*: Finden Sie eine Gleichung, die das Skalarfeld $\chi$ der Eichtransformation erfüllen muss und begründen Sie, warum es plausibel ist, dass diese Gleichung eine Lösung hat. *Hinweis 2*: Die Ergebnisse aus [H17] und [H31] können hilfreich sein, den Existenzbeweis einer Lösung für die Poisson-Gleichung auf den vorliegenden Fall zu übertragen.

(c) Welche Eichtransformationen sind möglich, so dass die Lorenz-Eichung erhalten bleibt?

(d) In der sogenannten *Strahlungseichung* fordert man $\Phi = 0$ und $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Ist somit auch die Lorenz-Bedingung erfüllt? Ist so eine Eichung möglich?

**[H34]** *Zeitabhängige Felder* **[$6 + 2 = 8$ Punkte]**

Gegeben sei das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left(x^2 - y^2 + ctx,\ y^2 + cty,\ z^2 - y^2 + ctz\right) .$$

(a) Bestimmen Sie die magnetische Flussdichte $\vec{B}(\vec{r}, t)$ mit der Anfangsbedingung $\vec{B}(\vec{r}, 0) = 0$, sowie eine Ladungsdichte $\varrho(\vec{r}, t)$ und eine Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t)$, so dass die Maxwell-Gleichungen erfüllt sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung für $\varrho$ und $\vec{j}$ erfüllt ist.

**HINWEIS: Bitte geben Sie immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!**
**Bitte Lösungen unbedingt zusammenheften!**